数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 22-39

L-functions for generic cusp forms on $GSp(2)\times GL(2)$

上智大学理工学部　森山 知則
(Tomonori Moriyama)

§0. Introduction

本稿では, 次数 2 の Siegel 尖点形式 F と一変数尖点形式 φ の組から定まる 8 次のオイラー積をもつ L-関数 (以下, degree 8 L-関数という) について論じる。詳しくは, 尖点形式 F が大域的 Whittaker 模型を持ち, 無限素点で非正則な離散系列表現を生成する場合等に, 問題の L-関数が有理型関数に解析接続され, 期待される関数等式を満たすことを示すとともに, 可能な極の位置を決定する。

ここでの証明は, M. Novodvorsky [No] が 1970 年代後半に導入した degree 8 L-関数の積分表示を用いる。この積分表示法における実素点における寄与は, $GSp(2,\mathbf{R})$ および $GL(2,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数の積分変換 (=実素点における局所ゼータ積分) として与えられる。本稿では, 最近１０年くらいの間に得られた $GSp(2,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数の公式 ([O], [M-O],[Mo-1], [Is], [Is-Mo]) によって局所ゼータ積分を計算することで上述の結果を示す。保型形式の「重さ」にある条件を課した場合には, [Mo-1] , [Mo-3] で述べたが, 今回この条件をはずした場合も扱うことができた。

ところで, D. Soudry [So-2] は簡約リー群上の Whittaker 関数の漸近展開を用いて, $SO_{2l+1}\times GL_n$ の無限素点における局所ゼータ積分が全 s-平面に有理型に解析接続されることを証明している。本稿の場合においてもこの手法によって, degree 8 L-関数の解析接続が証明できると期待される (本稿で考察する場合の一部は, [So-2] における $SO_5\times GL_2$ にあたる)。但し, このやり方で, L-関数の possible poles を決めることが可能かどうかは筆者には不明である。

なお, 大域的 Whittaker 模型を持たない尖点形式 (たとえば, 正則尖点形式) については, Novodvorsky の積分表示法は適用できないので, 別の積分表示を用いる必要がある。そのようなものは, M. Furusawa [Fu] と B. Heim [H] によってそれぞれ与えられていることを注意しておく ([B-H] も参照)。

全体の構成は次のとおり: §1 で主定理を定式化し, §2, 3 で Novodvorsky の積分表示とそこで必要な $GL(2)$ 上の Eisenstein 級数についてまとめる。§4 で必要な計算をして, 主結果を証明する。既知の事実をまとめた §2,3 が長くなり, 肝心の §4 が短くなってしまった。詳しくは, 準備中の論文を参照していただきたい。

記号 1 (Haar 測度等)
k を代数体とし, その素点 v における完備化を k_v であらわす。k_v の整数環 $\mathfrak{O}_v$ の素イデアルを $\mathfrak{P}_v=(\varpi_v)$ とするとき, $q_v:=\sharp(\mathfrak{O}_v/\mathfrak{P}_v)$ とおく。k のアデール環を $\mathbf{A}_k$ の非自明なユニタリ指標 $\psi:\mathbf{A}_k\to\mathbf{C}^{(1)}$ を

$$\psi(x):=\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(\mathrm{tr}(x)),\quad x\in\mathbf{A}_k,$$

で定める。そうして, 各素点 v に対して, k_v のユニタリ指標 ψ_v を ψ の制限として定義する。k_v 上の Haar 測度 μ_v を ψ_v に関して self-dual になるようにとる。特に, $k_v\cong\mathbf{R}$ のとき

には，$\psi_v(x_v)=\exp(2\pi\sqrt{-1}x_v)$ なので，μ_v は Lebesgue 測度であり，$k_v\cong\mathbf{C}$ のときには，$\psi_v(x_v)=\exp(2\pi\sqrt{-1}(x_v+\bar{x}_v))$ なので，$\mu_v=|dx_v\wedge d\bar{x}_v|=2dx'_v\wedge dx''_v$ $(x_v=x'_v+\sqrt{-1}x''_v)$ となる。v が有限素点では，$\mu_v(\mathfrak{O}_v)=q_v^{-d_v/2}$ ($d_v:=\psi_v$ の order$=k_v/\mathbf{Q}_p$ の differental exponent)。また，$k_v^\times$ の Haar 測度は，有限素点では $d^\times t:=(1-q_v^{-1})^{-1}\dfrac{dt}{|t|_v}$ と正規化し，無限素点では $d^\times t:=\dfrac{dt}{|t|_v}$ とおく。

記号 2（代数群等）
G を k 上定義された similitude 付きの 2 次 simplectic 群とする:

$$\mathsf{G}=GSp(2):=\{g\in GL(4)\,\big|\,{}^tgJ_4g=\nu(g)J_4\text{ for some }\nu(g)\in\mathbf{G}_m\},\quad J_4=\begin{pmatrix}0_2&1_2\\-1_2&0_2\end{pmatrix}.$$

G の中心は $\mathsf{Z}:=\{z1_4\in G|z\in\mathbf{G}_m\}$ で与えられる。以下で用いる G の部分代数群等を列挙しておこう。まず, $\mathsf{H}:=\{h=(h_1,h_2)\in GL(2)\times GL(2)|\det(h_1)=\det(h_2)\}$ とおき,

$$\mathsf{H}\ni h=(h_1,h_2)\mapsto\left(\begin{array}{cc|cc}a_1&&b_1&\\&a_2&&b_2\\\hline c_1&&d_1&\\&c_2&&d_2\end{array}\right)\in\mathsf{G},\qquad h_i=\begin{pmatrix}a_i&b_i\\c_i&d_i\end{pmatrix},$$

によって G の部分代数群と見る。G の極大冪単部分群 N および H の極大冪単部分群 N^H として

$$\mathsf{N}:=\left\{n(x_0,x_1,x_2,x_3):=\left(\begin{array}{cc|cc}1&&x_1&x_2\\&1&x_2&x_3\\\hline&&1&\\&&&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc}1&x_0&&\\&1&&\\\hline&&1&\\&&-x_0&1\end{array}\right)\in\mathsf{G}\right\},\quad\mathsf{N}^\mathsf{H}:=\mathsf{N}\cap\mathsf{H}$$

をとる。また $GL(2)$ の部分代数群 B′,Q, N′ を

$$\mathsf{B}':=\left\{\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix}\in GL(2)\right\},\quad\mathsf{Q}:=\left\{\begin{pmatrix}*&*\\0&1\end{pmatrix}\in GL(2)\right\},\quad\mathsf{N}':=\left\{\begin{pmatrix}1&*\\0&1\end{pmatrix}\in GL(2)\right\}$$

で定義する。$GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ の極大コンパクト部分群 K' として,

$$K'=\prod_v K'_v=\prod_{v:real}O(2)\times\prod_{v:complex}U(2)\times\prod_{v<\infty}GL(2,\mathfrak{O}_v)$$

をとる。

§1. 主結果

この節では，$k=\mathbf{Q}$ とする (総実代数体としてもほとんど同じである)。

(1.1) 状況設定.
$\Pi=\otimes'\Pi_v$, $\sigma=\otimes'\sigma_v$ を $\mathsf{G}_{\mathbf{A}_k}$ 及び $GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ の尖点保型表現とする。序で述べたように，次の仮定を置く：

仮定 1. Π は大域的 Whittaker 模型を持つ。

仮定 1 から，無限素点の表現 Π_∞ は局所 Whittaker 模型を持つが，そのようなものは Kostant/Vogan の結果によって $\mathsf{G}_\mathbf{R}$ の放物型部分群の共役類と bijective な 4 つのクラスに分けられるが，ここでは，そのうちのひとつを扱う:

仮定 2. $\Pi_\infty|_{Sp(2,\mathbf{R})}$ は $Sp(2,\mathbf{R})$ の 2 つの (limits of) large discrete seires $D_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ と $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$

の直和である $(1-\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant 0)$。

ここで, $D_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ はその極小 K-タイプの最高ウェイトが (λ_1,λ_2) であるような (limits of) large discrete series representation（詳しくは, [O], [Mo-2], [Mo-4] 等を参照)。一方, $GL(2)$ の尖点保型表現 σ は必ず Whittaker 模型をもつから, σ_∞ は次の２つのクラスに分けられる：

(i) $\sigma_\infty|_{SL(2,\mathbf{R})} = D_l \oplus D_{-l}$, $\sigma_\infty(z_\infty) = z_\infty^{c''_\infty}$. この表現 σ_∞ を $D_l[c''_\infty]$ で表す。ここで, D_l は極小 $SO(2)$-type $l \in \{\pm1,\pm2,\cdots\}$ の離散系列表現またはその極限である。

(ii) σ_∞ が既約主系列表現のとき:

$$\sigma_\infty = \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}'_{\mathbf{R}}}^{GL(2)_{\mathbf{R}}}\left(\begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \mapsto |b_1b_2|^{c''_\infty/2}\epsilon_1(b_1)\epsilon_2(b_2)|b_1/b_2|^{(\nu+1)/2}\right), \quad \mathrm{Re}(\nu) \geqslant 0.$$

ここで, $\epsilon_i : \mathbf{R}^\times \twoheadrightarrow \mathbf{R}^\times/\mathbf{R}_{>0} \to \{\pm1\}$ は指標。この表現を, $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}'_{\mathbf{R}}}^{GL(2)_{\mathbf{R}}}(\epsilon_1,\epsilon_2;c''_\infty,\nu)$ で表す。

したがって, $(\Pi_\infty,\sigma_\infty)$ の可能性は, 次の表のようになる：

Π_∞ の種類	(L)DS.	P_J-主系列	$P_{\min}$-主系列	P_S-主系列
σ_∞: (L)DS.	今回	左と同様に扱える	yet	yet
σ_∞: PS.	今回	左と同様に扱える	Niwa	yet

仮定２は, この表の１列目に対応する。表の２列目もほぼ同様に扱えるがここでは略す。また, ３列目の一部 (”spherical case”) は [Ni] で扱われている。

(1.2) L-関数.

Π, σ を上のものとするとき, それぞれの中心指標を $\omega_\Pi, \omega_\sigma$ とする。以下, 一般性を損なわないので, 次の約束をしておく。

約束. $\omega_\Pi\ \omega_\sigma$ はユニタリとし, $\omega_\Pi\cdot\omega_\sigma = |\cdot|^\rho$, $\rho \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$ ならば, $\rho=0$ とする。

このとき, 各有限素点 $v=p$ においては, 後述の定義-命題 3.3 によって局所的な L-因子 $L(s,\Pi_p\times\sigma_p)$ および ϵ-因子 $\epsilon(s,\Pi_v\times\sigma_v,\psi_v)$ が定義される。これは, ほとんどすべての素点では, 8 次のオイラー因子を定める。また, 実素点 $v=\infty$ においては, Π_∞, σ_∞ の Langlands parameter から $L(s,\Pi_\infty\times\sigma_\infty)$ および $\epsilon(s,\Pi_\infty\times\sigma_\infty,\psi_\infty)$ を定める (具体形は **(4.2)** に与える)。このとき, 本稿の考察対象である **degree 8 L-関数**とその ϵ-因子が

$$L(s,\Pi\times\sigma) := \prod_v L(s,\Pi_v\times\sigma_v), \quad \epsilon(s,\Pi\times\sigma) := \prod_v \epsilon(s,\Pi_v\times\sigma_v,\psi_v)$$

で定義される。また,

$$\Pi^\vee := \{\widetilde{F}|F\in\Pi\}, \qquad \widetilde{F}(g) = \omega_\Pi(\nu(g))^{-1}F(g)$$
$$\sigma^\vee := \{\widetilde{\varphi}|\varphi\in\sigma\}, \qquad \widetilde{\sigma}(h) = \omega_\sigma(\det(h))^{-1}\varphi(h)$$

とおくと, これらはそれぞれ Π, σ の反傾表現で, $\Pi^\vee$ も**仮定 1**, **仮定 2** を満たすので

$$L(s,\Pi^\vee\times\sigma^\vee) := \prod_v L(s,\Pi_v^\vee\times\sigma_v^\vee)$$

が定義される。このとき, 本稿の主結果は次のとおり：

定理 1.1. 上の **仮定 1,2** および **約束** のもとで, 次が成立：

(*i*) $L(s,\Pi\times\sigma)$ は全 s-平面に有理型に解析接続され, 関数等式

$$L(s,\Pi\times\sigma) = \epsilon(s,\Pi\times\sigma)\times L(1-s,\Pi^\vee\times\sigma^\vee)$$

を満たす。
(*ii*) $\omega \neq 1$ のときは，$L(s, \Pi \times \sigma)$ は整関数であり，$\omega = 1$ のときは $s = 0, 1$ で高々一位の *pole* を持つほかは *holomorphic* である。

★ **注意と訂正:** (i) Gamma 因子 $L(s, \Pi_\infty \times \sigma_\infty)$, ϵ-因子 $\epsilon(s, \Pi_\infty \times \sigma_\infty, \psi_\infty)$ は講演のときとは異なるものを用いている (関数等式を成立させる Gamma 因子は，一通りではない)。また，[Mo-3, 定理 1.1, p.177] では，$L_\infty(s, F \times \varphi)$ の定義を

$$
\begin{aligned}
&L_\infty(s, F \times \varphi)\\
=&\Gamma_{\mathbf{C}}(s + \frac{-\lambda_2}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s + \frac{-\lambda_2}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s + \frac{2\lambda_1 + \lambda_2 - 2}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s + \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - 2}{2})
\end{aligned}
$$

とすべきである。この誤りは，[Mo-3, p.178] の f_∞ の定義式で $\Gamma_{\mathbf{R}}(2s + \lambda_2)$ を $\Gamma_{\mathbf{R}}(2s - \lambda_2)$ とすべきであったことに由来する。
(ii) §4 の計算を見れば，$L(s, \Pi \times \sigma)$ が $s = 0, 1$ で pole を持つための必要条件はもっと精密に与えることができるが，ここでは略す。

§2. Eisenstein Series on GL(2)

$GL(2)$ 上の Eisensetin Series について, 必要事項をまとめる ([J])。
(2.1) Induced representation (local).
$k_v^\times$ の二つのユニタリ指標 $\xi_i : k_v^\times \to \mathbf{C}^{(1)}$ $(i = 1, 2)$ をとって固定し,

$$\chi_1(x) = \chi_1(s, x) := \xi_1(x)|x|^s, \quad \chi_2(x) = \chi_2(s, x) := \xi_2(x)|x|^{-s}, \qquad s \in \mathbf{C}, \quad i = 1, 2,$$

とおく。誘導表現の空間 $I(\chi_1, \chi_2)$ を

$$
\begin{aligned}
I(\chi_1, \chi_2) := \{f : GL(2)_{k_v} \to \mathbf{C} | f(\begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} h_1) = \chi_1(b_1)\chi_2(b_2)f(h_1),\\
\forall \begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathsf{B}'_{k_v}, \forall h_1 \in GL(2)_{k_v}\}
\end{aligned}
$$

で定義する。$\mathbf{C}$ を底空間とする (ファイバーが無限次元の)「ベクトル束」

$$I(\xi_1, \xi_2; s) := \sqcup_{s \in \mathbf{C}} I(\xi_1 |\cdot|^s, \xi_2 |\cdot|^{-s}) \to \mathbf{C},$$

が定義される。

定義 2.1 (standard section). (i) 関数 $f : \mathbf{C} \times GL(2)_{k_v} \to \mathbf{C}$ が $I(\xi_1, \xi_2; s)$ の standard section とは，次の 2 条件を満たすことを言う：
(a) 任意の $s \in \mathbf{C}$ に対して，関数

$$GL(2)_{k_v} \ni h_1 \mapsto f(s, h_1) \in \mathbf{C}$$

は $I(\xi_1 |\cdot|^s, \xi_2 |\cdot|^{-s})$ に属す。
(b) $K_v \ni k \mapsto f(s, k) \in \mathbf{C}$ は $s \in \mathbf{C}$ によらない右 K_v-有限な関数。
standard section の全体を，$\mathcal{I}^{std}(\xi_1, \xi_2; s)$ と書く。
(ii) 関数 $f : \mathbf{C} \times GL(2)_{k_v} \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ は, 有限個の stnadard section $f_i \in \mathcal{I}^{std}(\xi_1, \xi_2; s)$ を用いて,

$$f(s, h_1) = \sum_i a_i(s) f_i(s, h_1), \quad a_i(s) \text{ は holomorphic (resp. meromorphic)}$$

と書けるとき，$I(\xi_1, \xi_2; s)$ の holomorphic (resp. meromorphic) section であるという。以下，慣習に従って，f が極を持つときにも，$f : \mathbf{C} \times GL(2)_{k_v} \to \mathbf{C}$ と書く。

次に，以下で有用な有理型切断である Jacquet section を導入する。まず，有限素点 v に対しては，k_v^2 上の Schwarz 関数の空間を

$$\mathcal{S}(k_v^2) := \{\Phi : k_v^2 \to \mathbf{C} |\ \text{局所定数，コンパクト台を持つ}\},$$

で定義する。$\Phi \in \mathcal{S}(k_v^2)$ に対して，

$$f_\Phi(h_1) := \xi_1(\det(h_1)) \times |\det(h_1)|^s \times \int_{k_v^\times} \Phi((0,t)h_1)(\xi_1 \cdot \xi_2^{-1})(t)|t|^{2s} d^\times t$$

とおく。

命題 2.2. $f_\Phi(h)$ は，$\mathrm{Re}(s) > 0$ で絶対収束し，解析接続によって有理型切断を定める。しかも，$\xi_1 \cdot \xi_2^{-1} = |\cdot|^\lambda$ のときに

$$s \in -\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi\sqrt{-1}\mathbf{Z}}{\log q_v}$$

に *simple pole* を持つほかは，正則である。このようにして得られた有理型切断を *Jacquet section* という。

次に，無限素点における Jacquet section を定義する。$k_v \cong \mathbf{R}$ のときには，

$$\mathcal{S}(k_v^2, \psi_v) := \{p(x,y)\exp(-\pi(x^2+y^2)) | p \in \mathbf{C}[X,Y]\}$$

と置き，$k_v \cong \mathbf{C}$ のときには，

$$\mathcal{S}(k_v^2, \psi_v) := \{p(x,\bar{x},y,\bar{y})\exp(-\pi(x\bar{x}+y\bar{y})) | p \in \mathbf{C}[X_1,X_2,Y_1,Y_2]\}$$

と置く。$\Phi \in \mathcal{S}(k_v^2, \psi_v)$ に対して，$GL(2)_{k_v}$ 上の関数 $f_\Phi(s, h_{1,v})$ を上と同じ式で定める。

命題 2.3. v を無限素点とし，$\Phi \in \mathcal{S}(k_v^2, \psi_v)$ をとる。すると，$f_\Phi(s, h_1)$ は，$\mathrm{Re}(s) > 0$ で絶対収束し，解析接続によって有理型切断を定める。この有理型切断を *Jacquet section* という。

正則切断，有理型切断，Jacquet 切断の全体をそれぞれ，$\mathcal{I}^{holo}(\xi_1,\xi_2;s)$, $\mathcal{I}^{mero}(\xi_1,\xi_2;s)$, $\mathcal{I}^J(\xi_1,\xi_2;s)$ で表す。

(2.2) Intertwining operators (local).
$f(s,h) \in \mathcal{I}^{std}(\xi_1,\xi_2;s)$ に対して，

$$Mf(s,h_1) := \int_{k_v} f(s, w_0 \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_1) dx, \qquad w_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

とおく。

命題 2.4. $f(s,h_1) \in \mathcal{I}^{std}(\xi_1,\xi_2;s)$ を *standard section* とする。
(i) $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ なる $s \in \mathbf{C}$ に対して，$Mf(s,h)$ は収束し $I(\xi_2|\cdot|^{1-s}, \xi_1|\cdot|^{-(1-s)})$ に属す。
(ii) 任意の $h \in GL(2)_{k_v}$ に対して，

$$\{s \in \mathbf{C} | \mathrm{Re}(s) > 1/2\} \ni s \mapsto Mf(s,h_1) \in \mathbf{C}$$

は全 s-平面上の有理型関数として解析接続される。
(iii) こうして定義される関数

$$Mf : \mathbf{C} \times GL(2)_{k_v} \to \mathbf{C}$$

は $I(\xi_2,\xi_1;1-s)$ の有理型切断である。

有理型切断 $f(s,h_1)=\sum_i a_i(s)f_i(s,h_1)$ に対して，$Mf(s,h_1):=\sum_i a_i(s)[Mf_i](s,h_1)$ と定義することにより，絡作用素の定義域を有理型切断にまで拡張しておく：

$$M:\mathcal{I}^{mero}(\xi_1,\xi_2;s)\to\mathcal{I}^{mero}(\xi_2,\xi_1;1-s).$$

同様にして，$f\in\mathcal{I}^{std}(\xi_2,\xi_1;1-s)$ に対して

$$\widetilde{M}f(s,h_1):=\int_{k_v}f(s,w_0\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}h_1)dx$$

とおく。今度は $\mathrm{Re}(s)<1/2$ で絶対収束し，それを解析接続することで絡作用素

$$\widetilde{M}:\mathcal{I}^{mero}(\xi_2,\xi_1;1-s)\to\mathcal{I}^{mero}(\xi_1,\xi_2;s)$$

が定義される。

命題 2.5 (絡作用素の性質). (i) $L(2s-1,\xi_1\xi_2^{-1})^{-1}M$ は *holomorphic*. すなわち，$f\in\mathcal{I}^{holo}(\xi_1,\xi_2;s)$ を $\mathcal{I}^{holo}(\xi_2,\xi_1;1-s)$ へ写す。
(ii) 次の等式が成立：

$$\widetilde{M}\circ M=\epsilon'(1-2s,\xi_2\cdot\xi_1^{-1},\psi_v)^{-1}\times\epsilon'(2s-1,\xi_1\cdot\xi_2^{-1},\psi_v)^{-1}\times\mathrm{id}.$$

ここで，$\epsilon'(s,\xi,\psi_v):=\epsilon(s,\xi,\psi_v)\times\dfrac{L(1-s,\xi^{-1})}{L(s,\xi)}$ である *(GL(1) の ϵ'-因子)*。
(iii) v を不分岐有限素点とする。すなわち ξ_1,ξ_2 は不分岐ユニタリ指標であって，ψ_v も不分岐 *(i.e. $d_v=0$)* を仮定する。f^0 及び $\widetilde{f}^0$ をそれぞれ $I(\xi_1,\xi_2;s)$ 及び $I(\xi_2,\xi_1;1-s)$ の $f^0(s,u)=\widetilde{f}^0(s,u)=1$ ($\forall u\in K_v'$) で正規化された不分岐な *standard section* とすると，次が成立：

$$Mf^0=\frac{L(2s-1,\xi_1\cdot\xi_2^{-1})}{L(2s,\xi_1\cdot\xi_2^{-1})}\times\widetilde{f}^0.$$

命題2.5 (ii) の証明の核心部分は次の補題である：

補題 2.6 ([J, page 14-15]). v を有限素点 *(resp.* 無限素点*)* とするとき $\Phi\in\mathcal{S}(k_v^2)$ *(resp.* $\Phi\in\mathcal{S}(k_v^2,\psi_v)$*)* に対して，その *Fourier* 変換 $\widehat{\Phi}\in\mathcal{S}(k_v^2)$ *(resp.* $\in\Phi\in\mathcal{S}(k_v^2,\psi_v)$*)* を

$$\widehat{\Phi}(u,v):=\int_{k_v^2}\Phi(x,y)\psi_v(-yu+xv)dxdy$$

で定義する。すると，$\Phi=\widehat{\widehat{\Phi}}$ がすぐ分かる。ここで，

$$\widetilde{f}_\Phi(s;h_1):=\xi_2(\det(h_1))|\det(h_1)|^{1-s}\times\int_{k_v^\times}\Phi((0,t)h_1)(\xi_2\cdot\xi_1^{-1})(t)|t|^{2-2s}d^\times t$$

と置けば，次の等式が成立する：

$$[Mf_\Phi](s,h_1)=(\xi_1\cdot\xi_2^{-1})(-1)\times\epsilon'(2s-1,\xi_1\cdot\xi_2^{-1},\psi_v)^{-1}\times\widetilde{f}_{\widehat{\Phi}}(s,h_1).\tag{2.1}$$

例. (i) v を上の (iii) の意味で不分岐な有限素点とする。$\Phi^\circ:=\mathfrak{O}_v^{\oplus2}$の特性関数 とすると，

$$f_{\Phi^\circ}(s,k_v)=L(2s,\xi_1\cdot\xi_2^{-1})=[1-\xi_1\cdot\xi_2^{-1}(\varpi_v)q_v^{-2s}]^{-1}$$

となっている。$\widehat{\Phi}^\circ=\Phi^\circ$ に注意すると，

$$Mf_{\Phi^\circ}=\frac{L(2s-1,\xi_1\cdot\xi_2^{-1})}{L(2-2s,\xi_2\cdot\xi_1^{-1})}\times\widetilde{f}_{\Phi^\circ}$$

となる。

(ii) $k_v \cong \mathbf{R}$ のときに，$\mathcal{I}^J(1,\omega^{-1};s)$ を考える。$\Phi \in \mathcal{S}(k_v^2,\psi_v)$ の基底 $\{\Phi_m(x,y)|m\in\mathbf{Z}\}$ を次で定める：

$$\Phi_m(x,y) := \begin{cases}(-x\sqrt{-1}+y)^m \exp(-\pi(x^2+y^2)) & \text{if } m \geqslant 0 \\ (x\sqrt{-1}+y)^{-m}\exp(-\pi(x^2+y^2)) & \text{if } m \leqslant 0.\end{cases}$$

Fourier 変換すると，$\widehat{\Phi}_m = \Phi_m\ (m \geqslant 0)$, $\widehat{\Phi}_m = (-1)^m\Phi_m\ (m\leqslant 0)$ である。$f_{\Phi_m}(s,h_1)$ は $SO(2)$ への制限によって決まるが，計算すれば

$$f_{\Phi_m}(s, \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}) = e^{\sqrt{-1}m\theta} \times \Gamma_{\mathbf{R}}(2s+|m|+c_\infty) \times \delta([(-1)^m = \omega(-1)])$$

である。これから，補題 2.6 を直接に確かめることもできる。

(2.3) Eisensetin series.

$\omega := \omega_\Pi \cdot \omega_\sigma$ と置く。$\xi_1 = 1, \xi_2 = \omega^{-1}$ のときを考える。$f \in \mathcal{I}^{std}(1,\omega^{-1};s)$ に対して，

$$E(h_1,s;f) := \sum_{\gamma\in \mathsf{B}'_k\backslash GL(2)_k} f(s,\gamma h_1)$$

と置く。これは，$\mathrm{Re}(s) > 1$ で広義一様に絶対収束し，そこで $GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ 上の保型形式を定める。さらに，各 $h \in GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ に対して，$\mathbf{C}$ 上の有理型関数として解析接続される。これは，$h_1 \in GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ によらない，集積点を持たない $\mathbf{C}$ の部分集合で極をもつ以外では，$GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ 上の保型形式を定める。有理型切断 $f = \sum_i a_i(s) f_i$, $f_i \in \mathcal{I}^{std}(1,\omega^{-1};s)$ に対して，

$$E(h_1,s;f) := \sum_i a_i(s)E(h_1,s;f_i)$$

と置くことで定義が拡張される。同様にして，

$$Mf = \sum_i b_i(s) f_i, \qquad f_i \in \mathcal{I}^{std}(\xi_2,\xi_1;1-s)$$

とかくとき，

$$E(h_1,s;Mf) := \sum_i b_i(s)E(h_1,s;f_i)$$

が右辺 ($\mathrm{Re}(s) \ll 0$ で絶対収束する) の解析接続として定義される。

<u>関数等式・極の位置・留数</u>

命題 2.7 (e.g. [J-S, lemma 4.2]). (i) $f \in \mathcal{I}^{mero}(\xi_1,\xi_2,s)$ に対して，次の関数等式が成立：

$$E(h_1,s;f) = E(h_1,s;Mf).$$

したがって，特に，$\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{A}_k^2,\psi)$ に対して，次が成立:

$$E(h_1,s;f_\Phi) = E(h_1,s;\widetilde{f}_{\widehat{\Phi}})$$

(ii) $E(h_1,s;f_\Phi)$ は，$\omega \neq 1$ のときは整関数である。
(iii) $\omega = 1$ のときは，ある正定数 $c>0$ が存在して，

$$E(h_1,s;f_\Phi) = \frac{c|\det(h_1)|^{s-1}\widehat{\Phi}(0)}{s-1} - \frac{c|\det(h_1)|^{-s}\Phi(0)}{s} + R(h_1,s)$$

となる。ここで，$R(h_1,s)$ は，h_1 を止めるごとに，s について整関数である。

(2.4) 絡作用の正規化.
大域的な Jacquet 切断 $\mathcal{I}^J(1,\omega^{-1};s)$ の空間を $\{f_{\Phi_v^\circ}|v: \text{不分岐}\}$ に関する制限テンソル積

$$\mathcal{I}^J(1,\omega^{-1};s) := \otimes_v' \mathcal{I}^J(1,\omega_v^{-1};s)$$

で定義する。大域的な絡作用素 $M:\mathcal{I}^J(1,\omega^{-1};s)\to\mathcal{I}^J(\omega^{-1},1;1-s)$ 及び $\widetilde{M}:\mathcal{I}^J(\omega^{-1},1;1-s)\to\mathcal{I}^J(1,\omega^{-1};s)$ が $M:=\otimes' M_v$ 及び $\widetilde{M}:=\otimes'\widetilde{M}_v$ によって定義される。さて，補題2.7を踏まえて，正規化された絡作用素 M_v^* 及び $\widetilde{M}_v^*$ を

$$M_v^* = \omega_v(-1)\epsilon'(2s-1,\xi_{1,v}\cdot\xi_{2,v}^{-1},\psi_v)M_v : \mathcal{I}^J(1,\omega_v^{-1};s)\to\mathcal{I}^J(\omega_v^{-1},1;1-s)$$
$$\widetilde{M}_v^* = \omega_v(-1)\epsilon'(1-2s,\xi_{2,v}\cdot\xi_{1,v}^{-1},\psi_v)\widetilde{M}_v : \mathcal{I}^J(\omega_v^{-1},1;1-s)\to\mathcal{I}^J(1,\omega_v^{-1};s),$$

で定義する。すると，不分岐有限素点では，$M_v^* f_{\Phi^\circ} = \widetilde{f}_{\Phi^\circ}$ である。また，容易にわかるように，

$$M = \otimes_v' M_v^*, \qquad \widetilde{M} = \otimes_v' \widetilde{M}_v^*.$$

§3. Basic identity

この節では，局所-大局の関係を与える Basic identity を定式化する (詳しくは，[So-1], [Bu])。

(3.1) Zeta integrals (global)
Π,σ を $\mathsf{G}_{\mathbf{A}_k}$ 及び $GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ の尖点保型表現とする。有理型切断 $f\in\mathcal{I}^{mero}(1,\omega^{-1};s)$ をとり，(**2.3**) の方法で，Eisensetein series $E(h_1,s;f)$ を定義する。尖点形式の組 $(F,\varphi)\in\Pi\times\sigma$ に対して，大域的ゼータ積分 $Z(s,F\otimes\varphi,f)$ 及び $\widetilde{Z}(s,F\otimes\varphi,f)$ を

$$Z(s,F\otimes\varphi,f) := \int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\mathsf{H}_k\backslash\mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} F(h)\varphi(h_2)E(h_1,s;f)dh,$$
$$\widetilde{Z}(s,F\otimes\varphi,f) := \int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\mathsf{H}_k\backslash\mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} F(h)\varphi(h_2)E(h_1,s;Mf)dh$$
$$= \int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\mathsf{H}_k\backslash\mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} \widetilde{F}(h)\widetilde{\varphi}(h_2)\omega(\det(h_1))E(h_1,s;Mf)dh$$

で定義する。このとき，次が成立:

命題 3.1. (i) 上の二つの積分は，*Eisensetin series* の極以外で絶対収束し，$s\in\mathbf{C}$ の有理型関数を定める。
(ii)

$$\widetilde{Z}(s,F\otimes\varphi,f) = Z(s,F\otimes\varphi,f).$$

(iii) $Z(s,F\otimes\varphi,f_\Phi)$ は $\omega\neq 1$ のときは整型である。
(iv) $Z(s,F\otimes\varphi,f_\Phi)$ は $\omega=1$ のときは, $s=0,1$ で極を持つほかは正則であり，留数は次で与えられる：

$$\mathrm{Res}_{s=1}Z(s,F\otimes\varphi,f) = c\times\widehat{\Phi}(0)\times\int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}}\mathsf{H}_{\mathbf{Q}}\backslash\mathsf{H}_{\mathbf{A}}} F(h)\varphi(h_2)dh;$$
$$\mathrm{Res}_{s=0}Z(s,F\otimes\varphi,f) = -c\times\Phi(0)\times\int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}}\mathsf{H}_{\mathbf{Q}}\backslash\mathsf{H}_{\mathbf{A}}} F(h)\varphi(h_2)dh.$$

(3.2) 大域的 Whittaker 関数と Basic identity.

$\mathsf{N}_{\mathbf{A}_k}$ のユニタリ指標 $\psi_{\mathsf{N}} : \mathsf{N}_{\mathbf{A}_k} \to \mathbf{C}^{(1)}$ を

$$\psi_{\mathsf{N}}(n(x_0, x_1, x_2, x_3)) = \psi(-x_0 - x_3) \in \mathbf{C}^{(1)},$$

で定める。F の大域的 Whittaker 関数を

$$\mathcal{W}_F(g) := \int_{\mathsf{N}_k \backslash \mathsf{N}_{\mathbf{A}_k}} F(ng)\psi_{\mathsf{N}}(n^{-1})dn, \quad g \in \mathsf{G}_{\mathbf{A}_k},$$

で定義する。同じく φ の 大域的 Whittaker 関数を

$$\mathcal{W}_\varphi(h_2) := \int_{k\backslash \mathbf{A}_k} \varphi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_2)\psi(-x)dx, \quad h_2 \in GL(2)_{\mathbf{A}_k},$$

で定義する。Eisenstein 級数を unfold することで次が証明される：

命題 3.2 (Basic identity, cf.[B1, §3]). 全ての無限素点 v において，下に定義する局所ゼータ積分 $Z^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)}, \mathcal{W}_\varphi^{(v)}, f^{(v)})$ が $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束すると仮定する。
(i) 積分

$$\int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\mathsf{N}^{\mathsf{H}}{}_{\mathbf{A}_k}\backslash \mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} \mathcal{W}_F(h)\mathcal{W}_\varphi(h_2)f(s, h_1)dh, \tag{3.2}$$

は $\mathrm{Re}(s) > 3$ で *(f の極以外で)* 絶対収束して，$Z(s, F \otimes \varphi, f)$ に等しい。
(ii) 積分

$$\int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\mathsf{N}^{\mathsf{H}}{}_{\mathbf{A}_k}\backslash \mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} \mathcal{W}_F(h)\mathcal{W}_\varphi(h_2)Mf(s, h_1)dh, \tag{3.3}$$

は $\mathrm{Re}(s) < -1$ で *(Mf の極以外で)* 絶対収束して，$\widetilde{Z}(s, F \otimes \varphi, f)$ に等しい。

さて，尖点形式 F および φ が decomposable とすると，大域的 Whitatker 関数 $\mathcal{W}_F$ および $\mathcal{W}_\varphi$ は

$$\mathcal{W}_F(g) = \prod_v \mathcal{W}_F^{(v)}(g_v), \quad \text{for } g = (g_v) \in \mathsf{G}_{\mathbf{A}_k},$$

$$\mathcal{W}_\varphi(h_2) = \prod_v \mathcal{W}_\varphi^{(v)}(h_{2,v}), \quad \text{for } h_2 = (h_{2,v}) \in GL(2)_{\mathbf{A}_k}.$$

と局所 Whittaker 関数の積に分解する。

記号: 局所 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F^{(v)}$ および $\mathcal{W}_\varphi^{(v)}(h_{2,v})$ の属す Π_v や σ_v の属す Whittaker 模型を，それぞれ $\mathsf{Wh}(\Pi_v, \psi_v)$, $\mathsf{Wh}(\sigma_v, \psi_v)$ で表す。
さらに， 有理型切断 $f \in \mathcal{I}^{mero}(1, \omega^{-1}; s)$ も

$$f(s, h_1) = \prod_v f^{(v)}(s, h_{1,v}), \qquad f^{(v)} \in \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s)$$

と decomposable なものを考える。すると，上述の Basic identity によって，

(i) $Z(s, F \otimes \varphi, f) = \prod_v Z^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)}, \mathcal{W}_\varphi^{(v)}, f)$,

$$Z^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)}, \mathcal{W}_\varphi^{(v)}, f^{(v)}) := \int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\mathsf{N}^{\mathsf{H}}{}_{\mathbf{A}_k}\backslash \mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} \mathcal{W}_F^{(v)}(h_v)\mathcal{W}_\varphi^{(v)}(h_{2,v})f^{(v)}(s, h_{1,v})dh_v;$$

および

(ii) $\widetilde{Z}(s, F\otimes\varphi, f) = \prod_v Z^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)}, \mathcal{W}_\varphi^{(v)}, f)$,

$$\widetilde{Z}^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)}, \mathcal{W}_\varphi^{(v)}, f^{(v)}) := \int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\mathsf{N}^{\mathsf{H}}{}_{\mathbf{A}_k}\backslash \mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} \mathcal{W}_F^{(v)}(h_v)\mathcal{W}_\varphi^{(v)}(h_{2,v})M_v^* f^{(v)}(s, h_{1,v})dh_v,$$

$$= \int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\mathsf{N}^{\mathsf{H}}{}_{\mathbf{A}_k}\backslash \mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} \widetilde{\mathcal{W}}_F^{(v)}(h_v)\widetilde{\mathcal{W}}_\varphi^{(v)}(h_{2,v})\omega_v(\det(h_{1,v}))M_v^* f^{(v)}(s, h_{1,v})dh_v,$$

と書ける。ここで,

$$\widetilde{\mathcal{W}}_F^{(v)}(h_v) = \omega_\Pi(\nu(h_v))^{-1}\mathcal{W}_F^{(v)}(h_v) \quad \widetilde{\mathcal{W}}_\varphi^{(v)}(h_{2,v}) = \omega_\sigma(\det(h_{2,v}))^{-1}\mathcal{W}_\varphi^{(v)}(h_{2,v}),$$

と置いた。なお,

$$\omega_v(\det(h_{1,v}))M_v^* f^{(v)}(s, h_{1,v}) \in \mathcal{I}^{mero}(1, \omega_v; 1-s)$$

であることに注意する。

(3.3) 有限素点における局所関数等式

以下, 切断として Jacquet 切断 $f \in \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s)$ を主に考える。

定義-命題 3.3 ([So-1, §2]). (i) $P_v(0) = 1$ となる多項式 $P_v(X) \in \mathbf{C}[X]$ で次を満たすものがただ一つ存在する:

$$\mathbf{C}\text{-span}\{Z^{(v)}(s, W, W', f^{(v)}) | W \in \mathsf{Wh}(\Pi_v, \psi_v), W' \in \mathsf{Wh}(\sigma_v, \psi_v), f^{(v)} \in \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s)\}$$
$$= P_v(q_v^{-s})^{-1}\mathbf{C}[q_v^{-s}, q_v^s].$$

有限素点 v における L-因子を

$$L(s, \Pi_v \times \sigma_v) := P_v(q_v^{-s})^{-1}$$

で定める。

(ii) q_v^{-s} の単項式 $\epsilon(s, \Pi_v \times \sigma_v, \psi_v) = aq_v^{-bs}$ $(a \in \mathbf{C}^\times, b \in \mathbf{Z})$ が存在して,

$$\frac{\widetilde{Z}^{(v)}(s, W, W', f)}{L(1-s, \Pi_v^\vee \times \sigma_v^\vee)} = \epsilon(s, \Pi_v \times \sigma_v, \psi_v) \times \frac{Z^{(v)}(s, W, W', f)}{L(s, \Pi_v \times \sigma_v)}$$

が, 全ての $W \in \mathsf{Wh}(\Pi_v, \psi_v), W' \in \mathsf{Wh}(\sigma_v, \psi_v), f \in \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s)$ に対して存在する。

(3.4) 不分岐有限素点における計算

Π_v, σ_v が不分岐主系列表現で ψ_v も不分岐とするとき, 局所ゼータ積分を計算する。$W^0 \in \mathsf{Wh}(\Pi_v, \psi_v), W'^0 \in \mathsf{Wh}(\sigma_v, \psi_v), f^{(v)} \in \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s)$ が全て不分岐とする。ただし, $W^0(1_4) = 1, W^{0\prime}(1_2) = 1, f^{0,(v)}(s, 1) = L(2s, \omega_v^{-1})$ と正規化されているとする。

$$Z^{(v)}(s, W^0, W'^0, f^{0,(v)})$$
$$= L(2s, \omega_v^{-1}) \times \sum_{k,l\geqslant 0} W^0(\mathrm{diag}(\varpi_v^{k+l}, \varpi_v^l, \varpi_v^{-l}, 1))W'^0(\mathrm{diag}(\varpi_v^l, 1))\omega_v(\varpi_v^l)q_v^{-(k+2l)s+2(k+l)}$$

Kato-Casselman-Shalika 公式によれば,

$$W^0(\mathrm{diag}(\varpi_v^{k+l}, \varpi_v^l, \varpi_v^{-k}, 1)) = \alpha_0^l \times q_v^{(-4k-3l)/2} \times \frac{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}\sum_{\epsilon_j=\pm1}\mathrm{sgn}(\sigma)\epsilon_1\epsilon_2\alpha_{\sigma(1)}^{\epsilon_1(k+l+2)}\alpha_{\sigma(2)}^{\epsilon_1(k+1)}}{(\alpha_1+\alpha_1^{-1}-\alpha_2-\alpha_2^{-1})(\alpha_1-\alpha_1^{-1})(\alpha_2-\alpha_2^{-1})},$$

$$W'^0(\mathrm{diag}(\varpi_v^l, 1)) = q_v^{-l/2} \times \frac{\beta_1^{l+1}-\beta_2^{l+1}}{\beta_1-\beta_2}.$$

ここで, 不分岐主系列表現 Π_v, σ_v の Satake parameter をそれぞれ

$$A_v = \mathrm{diag}(\alpha_0\alpha_1, \alpha_0\alpha_2, \alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}) \in GSp(2, \mathbf{C}), \quad B_v = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2) \in GL(2, \mathbf{C})$$

と書いた。これを代入して, 少々面倒だが計算すれば,

$$Z^{(v)}(s, W^0, W'^0, f^{0,(v)}) = [\det(1_8 - A_v \otimes B_v \cdot q_v^{-s})]^{-1}.$$

同様にして,

$$\widetilde{Z}^{(v)}(s, W^0, W'^0, f^{0,(v)}) = [\det(1_8 - A_v^\vee \otimes B_v^\vee \cdot q_v^{-(1-s)})]^{-1},$$

を得る。但し, ここで $A_v^\vee, B_v^\vee$ は不分岐主系列表現 $\Pi_v^\vee$, $\sigma_v^\vee$ の Satake parameter で, それぞれ $A_v^\vee = \omega_\Pi(\varpi_v)^{-1} \cdot A_v (\sim A_v^{-1}) \in GSp(2, \mathbf{C})$, $B_v^\vee = \omega_\sigma(\varpi_v)^{-1} \cdot B_v (\sim B_v^{-1}) \in GL(2, \mathbf{C})$ で与えられる。さらに, 局所 Whittaker 関数の漸近挙動 (germ expansion) を調べることで,

$$L(s, \Pi_v \times \sigma_v) = [\det(1_8 - A_v \otimes B_v \cdot q_v^{-s})]^{-1},$$
$$L(s, \Pi_v^\vee \times \sigma_v^\vee) = [\det(1_8 - A_v^\vee \otimes B_v^\vee \cdot q_v^{-s})]^{-1},$$

が証明される。したがって不分岐有限素点では $\epsilon(s, \Pi_v \times \sigma_v, \psi_v) = 1$ となることがわかる。

§4. 証明 (実素点における局所関数等式)

§2, 3 でまとめたことから, 主定理の証明のためには, 局所ゼータ積分 $Z^{(\infty)}(s, W, W', f)$ の解析接続され, しかるべき「局所関数等式」を満たすことをいえばよい。ここでは, Whittaker 関数の明示公式を使って $Z^{(\infty)}(s, W, W', f)$ を計算することで, これらのことを証明する。

★ **注意:** [Mo-3, 注意 2.8(1)] で「Whittaker 関数の明示公式なしでは L-関数の解析接続が証明できない」と述べたが, 序でも述べたように Whittaker 関数の漸近挙動を見ることで明示公式を使わずに $Z^{(\infty)}(s, W, W', f)$ の (したがって, L-関数の) 解析接続が証明できると思われる。いずれにせよ, 今の場合は, 局所ゼータ積分を計算しきることが可能なので, このような「定性的な」議論は用いない。

(4.1) Weil group の表現と L, ϵ-因子.
実数体 $\mathbf{R}$ の Weil 群は, $W_\mathbf{R} := \mathbf{C}^\times \sqcup \mathbf{C}^\times \cdot j \subset \mathbf{H}^\times$ である。$W_\mathbf{R}$ の既約連続表現とそれに付随する L-因子, ϵ-因子をリストアップしておく。

(i) 指標 ϕ_μ^+, ϕ_μ^-, $(\mu \in \mathbf{C})$

$$\phi_\mu^+(z) = |z|^{2\mu} = |z|_\mathbf{C}^\mu, \quad \phi_\mu^+(j) = 1,$$
$$\phi_\mu^-(z) = |z|^{2\mu} = |z|_\mathbf{C}^\mu, \quad \phi_\mu^-(j) = -1,$$

に対しては,

$$L(s, \phi_\mu^+) := \Gamma_\mathbf{R}(s + \mu) \qquad \epsilon(s, \phi_\mu^+, \psi_\infty) = 1,$$
$$L(s, \phi_\mu^-) := \Gamma_\mathbf{R}(s + \mu + 1) \qquad \epsilon(s, \phi_\mu^-, \psi_\infty) = \sqrt{-1}$$

と定める。また, ϕ_μ^+, ϕ_μ^- に対応する $GL_1(\mathbf{R})$ の表現は,

$$\phi_\mu^+ \leftrightarrow [\mathbf{R}^\times \ni x \mapsto |x|^\mu \in \mathbf{C}^\times], \qquad \phi_\mu^- \leftrightarrow [\mathbf{R}^\times \ni x \mapsto |x|^\mu \mathrm{sgn}(x) \in \mathbf{C}^\times],$$

である。

(ii) 2次元表現 $\phi_{\mu,N}: W_{\mathbf{R}} \to GL(2,\mathbf{C})$ $(\mu \in \mathbf{C}, N \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1})$

$$\phi_{\mu,N}(re^{\sqrt{-1}\theta}) = \begin{pmatrix} r^{2\mu-N}e^{-\sqrt{-1}N\theta} & 0 \\ 0 & r^{2\mu-N}e^{+\sqrt{-1}N\theta} \end{pmatrix},$$
$$\phi_{\mu,N}(j) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^N \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

に対しては,

$$L(s,\phi_{\mu,N}) := \Gamma_{\mathbf{C}}(s+\mu), \quad \epsilon(s,\phi_{\mu,N},\psi_\infty) = (\sqrt{-1})^{N+1},$$

と定める。

注意. 形式的に $\phi_{\mu,0}$ を考えると,

$$\phi_{\mu,0} \cong \phi_\mu^+ \oplus \phi_\mu^-.$$

これは,

$$\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\mu) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s+\mu)\Gamma_{\mathbf{R}}(s+\mu+1),$$
$$\sqrt{-1} = \epsilon(s,\phi_\mu^+,\psi_\infty)\epsilon(s,\phi_\mu^-,\psi_\infty),$$

に対応していると考えられる。

テンソル積

$$\phi_{\mu_1}^+ \otimes \phi_{\mu_2}^+ \cong \phi_{\mu_1+\mu_2}^+, \qquad \phi_{\mu_1}^+ \otimes \phi_{\mu_2}^- \cong \phi_{\mu_1+\mu_2}^-, \qquad \phi_{\mu_1}^- \otimes \phi_{\mu_2}^- \cong \phi_{\mu_1+\mu_2}^+,$$
$$\phi_{\mu_1,N_1} \otimes \phi_{\mu_2}^\pm \cong \phi_{\mu_1+\mu_2,N_1}, \quad \phi_{\mu_1,N_1} \otimes \phi_{\mu_2,N_2} \cong \phi_{\mu_1+\mu_2,N_1+N_2} \oplus \phi_{\mu_1+\mu_2-N_2,N_1-N_2} \quad \text{if } N_1 \geqslant N_2.$$

(4.2) L, ϵ-因子の定義

$\Pi_\infty|_{G_0} = D_{(\lambda_1,\lambda_2)} \oplus D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$, $\Pi_\infty(z_\infty) = z_\infty^{c'_\infty}$, $(1-\lambda_1 \leqslant< \lambda_2 \leqslant 0)$. とする。この表現 Π_∞ の Langlands parameter $\phi[\Pi_\infty]$ は

$$\phi[\Pi_\infty] = \phi_{\mu_1,N_1} \oplus \phi_{\mu_2,N_2}$$

with

$$\mu_1 = \frac{c'_\infty + \lambda_1 - \lambda_2 - 1}{2}, \quad N_1 = \lambda_1 - \lambda_2 - 1;$$
$$\mu_2 = \frac{c'_\infty + \lambda_1 + \lambda_2 - 1}{2}, \quad N_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - 1,$$

である。

<u>case (i)</u> $\sigma_\infty = D_l[c''_\infty]$ のとき。$\sigma_\infty|_{SL(2,\mathbf{R})}$ の Langlands parameter $\phi[\sigma_\infty]$ は

$$\phi[\sigma_\infty] = \phi_{\mu_3,N_3} \qquad \mu_3 = \frac{c''_\infty + l - 1}{2}, \quad N_3 = l - 1,$$

である。これから, $\Pi_\infty \times \sigma_\infty$ の L-因子, ϵ-因子は, 次のようになる $(c_\infty = c'_\infty + c''_\infty)$:

$$\begin{aligned} L(s,\Pi_\infty \times \sigma_\infty) =& \Gamma_{\mathbf{C}}(s + \frac{c_\infty + \lambda_1 - \lambda_2 + l - 2}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s + \frac{c_\infty + |\lambda_1 - \lambda_2 - l|}{2}) \\ & \times \Gamma_{\mathbf{C}}(s + \frac{c_\infty + \lambda_1 + \lambda_2 + l - 2}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s + \frac{c_\infty + |\lambda_1 + \lambda_2 - l|}{2}), \end{aligned}$$

$$\epsilon(s,\Pi_\infty \times \sigma_\infty,\psi_\infty) = \begin{cases} 1 & \text{if } |l - \lambda_1| \geqslant -\lambda_2; \\ (-1)^{l+\lambda_1-\lambda_2} & \text{if } |l - \lambda_1| \leqslant -\lambda_2. \end{cases}$$

case (ii) $\sigma_\infty = \mathrm{Ind}_{\mathbf{B}'_{\mathbf{R}}}^{GL(2)_{\mathbf{R}}}(\epsilon_1, \epsilon_2; c''_\infty, \nu)$ のとき: この表現 σ_∞ の Langlands parameter $\phi[\sigma_\infty]$ は

$$\phi[\sigma_\infty] = \phi_{\mu_3}^{\epsilon_1} \oplus \phi_{\mu_4}^{\epsilon_1} \qquad \mu_3 = \frac{c''_\infty + \nu}{2}, \quad \mu_4 = \frac{c''_\infty - \nu}{2},$$

である。したがって, これから, $\Pi_\infty \times \sigma_\infty$ の L-因子, ϵ-因子は, 次のようになる:

$$\begin{aligned} L(s, \Pi_\infty \times \sigma_\infty) =& \Gamma_{\mathbf{C}}(s + \frac{c_\infty + \lambda_1 - \lambda_2 + \nu - 1}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s + \frac{c_\infty + \lambda_1 - \lambda_2 - \nu - 1}{2}) \\ &\times \Gamma_{\mathbf{C}}(s + \frac{c_\infty + \lambda_1 + \lambda_2 + \nu - 1}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s + \frac{c_\infty + \lambda_1 + \lambda_2 - \nu - 1}{2}), \\ \epsilon(s, \Pi_\infty \times \sigma_\infty, \psi_\infty) =& 1. \end{aligned}$$

(4.3) $Z^{(\infty)}(s, W, W', f)$ の計算.
$c_\infty = 0$ としてよく, そのとき

$$\widetilde{Z}^{(\infty)}(s, W, W', f_{\Phi_m}) = Z^{(\infty)}(1 - s, W, W', f_{\widehat{\Phi}_m})$$

なので, 局所関数等式のためには,

$$Q(s) \equiv Q(s; W, W', f) := \frac{Z^{(\infty)}(s, W, W', f)}{L(s, \Pi_\infty \times \sigma_\infty)}$$

が, $Q(s) = Q(1-s)$ をみたすことが言えれば良い。実際に, $Z^{(\infty)}(s, W, W', f)$ を計算する。そのために次を用意しておく (証明は, Barnes' Lemma を用いれば容易):

補題 4.1. $\alpha_i \in \mathbf{C}$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$, $\alpha_2 + \alpha_5 = 2$ とする。

$$\begin{aligned} &Z^{(\infty)}(s; \alpha_1, \cdots, \alpha_6) \\ &= \int_0^\infty d^\times y_1 \int_0^\infty d^\times y_2 e^{-2\pi y_1} \int ds_1 \int ds_2 (4\pi^3 y_1^2 y_2)^{(-s_1+\alpha_1)/2} (4\pi y_1)^{(-s_1+\alpha_2)/2} \\ &\times \Gamma(\frac{s_1 + s_2 + \alpha_3}{2})\Gamma(\frac{s_1 + s_2 + \alpha_4}{2})\Gamma(\frac{s_1}{2})\Gamma(-\frac{s_2}{2}) \times m(s_1) \\ &\times \{e^{2\pi y_1} \int ds_3 (4\pi y_1)^{-s_3} \frac{\Gamma(s_3 + (\nu+1)/2)\Gamma(s_3 + (-\nu+1)/2)}{\Gamma(s_3 + \alpha_5/2)}\} \\ &\times y_1^{s-2} y_2^{2s-2} \times \Gamma_{\mathbf{R}}(2s + \alpha_6) \end{aligned}$$

は, $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束し次に等しい:

$$\begin{aligned} &\pi^{-4s+4-\alpha_6/2} 2^{-2s+4} \Gamma(s + \frac{\alpha_1 - 2}{2})\Gamma(s + \frac{\alpha_6}{2}) m(2s + \alpha_1 - 2) \\ &\times \Gamma(s + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \nu - 3}{2})\Gamma(s + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \nu - 3}{2}) \\ &\times \Gamma(s + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \nu - 3}{2})\Gamma(s + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 - \nu - 3}{2}) \\ &\times \Gamma(2s + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} - 3)^{-1}. \end{aligned}$$

計算 – Case (ii): $W \in \mathsf{Wh}(\Pi_\infty, \psi_\infty)$ を，$D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ の極小 K-タイプに属す「ウェイト」$(k-\lambda_1, -k-\lambda_2)$ のベクトル v_k に対応するものとする。すると，[O], [Mo-4] によって，

$$W(y_1,y_2) = e^{-2\pi y_1}\int ds_1 \int ds_2 (4\pi^3 y_1^2 y_2)^{(-s_1+\alpha_1)/2}(4\pi y_1)^{(-s_1+\alpha_2)/2}$$
$$\times\Gamma(\frac{s_1+s_2+\alpha_3}{2})\Gamma(\frac{s_1+s_2+\alpha_4}{2})\Gamma(\frac{s_1}{2})\Gamma(-\frac{s_2}{2}) \times (s_1)_k$$

with

$$\alpha_1 = \lambda_1 + 1 - k, \quad \alpha_2 = \lambda_2 + k, \alpha_3 = -2\lambda_2 + 1, \quad \alpha_4 = 1.$$

となることが分かる。一方，W' はウェイト $\lambda_2 + k$, $f(s; y_1, y_2)$ はウェイト $\lambda_1 - k$ にとる。すると，

$$W'(y_1) = e^{2\pi y_1}\int ds_3 (4\pi y_1)^{-s_3}\frac{\Gamma(s+(\nu+1)/2)\Gamma(s+(-\nu+1)/2)}{\Gamma(s_3+\alpha_5/2)} \quad \text{with } \alpha_5 = 2-\alpha_2,$$
$$f(s; y_1, y_2) = y_1^{s-2}y_2^{2s-2}\Gamma_{\mathbf{R}}(2s+\alpha_6) \quad \text{with } \alpha_6 = |\lambda_1 - k|.$$

である。補題を使って計算すると，$Q(s) = 1$ を得る．これから，所望の関数等式が成立し，Eisensetin 級数の極で一位の possible pole をもつほかは正則と分かる。

計算 – Case (i) $l \leqslant \lambda_1$ のときは，Case (ii) と同様に扱えるので略。$l \geqslant \lambda_1$ のときには，$\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ 上の Whittaker 関数として極小 K-タイプに属すベクトルに対応するものだけでは局所ゼータ積分を $\neq 0$ にできない。そこで，極小 K-タイプから外れたベクトル ($\in \Pi_\infty$) に対して局所ゼータ積分を計算する。この計算は，少し工夫を要する。まず $\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ のリー環の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の元 $X_{(1,-1)}$, $X_{(-1,-1)}$ を

$$X_{(1,-1)} := \left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & & -i \\ -1 & & -i & \\ \hline & i & & 1 \\ i & & -1 & \end{array}\right), \quad X_{(-1,-1)} := \left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & & -i \\ 1 & & -i & \\ \hline & -i & & -1 \\ -i & & -1 & \end{array}\right),$$

とおく。また，$X_{(0,-2)} := [X_{(1,-1)}, X_{(-1,-1)}]$ とおく。これらは，$Sp(2,\mathbf{R})$ の (標準的な) コンパクト Cartan 部分代数についてのルートベクトルになっている。
いま，$W \in \mathsf{Wh}(\Pi_\infty, \psi_\infty)$, および $W' \in \mathsf{Wh}(\sigma_\infty, \psi_\infty)$ が

$$W(g; X_{(1,-1)}) = 0, \qquad W'(h; X_{(0,-2)}) = 0,$$

をそれぞれ満たすとする。また，$q_1, q_2, n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 0$ が存在して，

$$W(g(r_{\theta_1}, r_{\theta_2})) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(q_1\theta_1 + q_2\theta_2))W(g), \quad \forall g \in \mathsf{G}_{\mathbf{R}}, \forall \theta_i \in \mathbf{R}$$
$$W'(h_2 r_{\theta_2}) = \exp(2\pi\sqrt{-1}((-q_2+n)\theta_2))W'(h_2), \quad \forall h_2 \in GL(2)_{\mathbf{R}}, \forall \theta_2 \in \mathbf{R}$$

だとする。ここで，$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と書いた。

補題 4.2. この状況で，$f \in \mathcal{I}^J(1, \omega^{-1}; s)$ を

$$f(s, h_1 r_{\theta_1}) = \exp(2\pi\sqrt{-1}((-q_1+n)\theta_1))f(s, h_1), \quad \forall h_1 \in GL(2)_{\mathbf{R}}, \forall \theta_1 \in \mathbf{R}$$

となるように取る。すると次が成立:

$$
\begin{aligned}
&Z^{(\infty)}(s, W(\cdot\,; (X_{(-1,-1)})^n), W', f)\\
&= \int_0^\infty d^\times y_1 \int_0^\infty d^\times y_2 W(y) W'(\mathrm{diag}(y_1,1)) f(s, \mathrm{diag}(y_1y_2, y_2^{-1}))(-4\pi\sqrt{-1}y_2)^n (y_1y_2)^{-2}
\end{aligned}
$$

ただし，$y = \mathrm{diag}(y_1y_2, y_1, y_2^{-1}, 1) \in \mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ と書いた。

Proof. まず，$X_{(1,-1)} + X_{(-1,-1)} \in \mathrm{Lie}(\mathsf{N}_{\mathbf{R}}) \otimes \mathbf{C}$ に注意すると，

$$(-4\pi\sqrt{-1}y_2)^n W(y) = W(y; (X_{(1,-1)} + X_{(-1,-1)})^n)$$

なので，

$$
\begin{aligned}
rhs. = &\sum_{i_1,\cdots,i_n=\pm1} \int_0^\infty d^\times y_1 \int_0^\infty d^\times y_2 W(y; X_{(i_n,-1)} \cdots X_{(i_2,-1)} \cdot X_{(i_1,-1)})\\
&\times W'(\mathrm{diag}(y_1,1)) f(s, \mathrm{diag}(y_1y_2, y_2^{-1}))(y_1y_2)^{-2}
\end{aligned}
$$

ここで，$\overrightarrow{i} = (i_1, i_2, \cdots, i_n) \neq (-1,-1,\cdots,-1)$ の項がすべて消えることをいえばよい(W や W' が単位元を含まない連結成分上でゼロであることにも注意)。$\overrightarrow{i} \neq (-1,-1,\cdots,-1)$ なる $\overrightarrow{i}$ をひとつ固定する。$i_p = 1$ となる最小の $1 \leqslant p \leqslant n$ が存在する。以下，p に関する帰納法。$p=1$ ならば，

$$W(y; X_{(i_n,-1)} \cdot \cdots \cdot X_{(i_2,-1)} \cdot X_{(i_1,-1)}) = 0$$

となって当然，積分の値もゼロ。$p \geqslant 2$ とする。

$$
\begin{aligned}
&X_{(i_n,-1)} \cdots X_{(i_2,-1)} \cdot X_{(i_1,-1)}\\
=&X_{(i_n,-1)} \cdots X_{(i_{p+1},-1)} \cdot X_{(1,-1)} \cdot (X_{(-1,-1)})^{p-1}\\
=&X_{(i_n,-1)} \cdots X_{(i_{p+1},-1)} \cdot (X_{(-1,-1)} \cdot X_{(1,-1)} + X_{(0,-2)}) \cdot (X_{(-1,-1)})^{p-2}\\
=&X_{(i_n,-1)} \cdots X_{(i_{p+1},-1)} \cdot X_{(-1,-1)} \cdot X_{(1,-1)} \cdot (X_{(-1,-1)})^{p-2}\\
&+ X_{(0,-2)} \cdot X_{(i_n,-1)} \cdots X_{(i_{p+1},-1)} \cdot (X_{(-1,-1)})^{p-2}
\end{aligned}
$$

帰納法の仮定より，第２項のみが問題である。$\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ の部分群 M_J^+ を

$$M_J^+ := \left\{ m = (m_1, m_2) \in \mathsf{G}_{\mathbf{R}} \middle| m_1 = \begin{pmatrix} y_1y_2 & \\ & y_2^{-1} \end{pmatrix}, y_i > 0, m_2 \in GL^+(2,\mathbf{R}) \right\}$$

で定義すると，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty d^\times y_1 \int_0^\infty d^\times y_2 W(y; X_{(0,-2)} \cdot X_{(i_n,-1)} \cdots X_{(i_{p+1},-1)} \cdot (X_{(-1,-1)})^{p-2})\\
&\times W'(\mathrm{diag}(y_1,1)) f(s, \mathrm{diag}(y_1y_2, y_2^{-1})) \times (y_1y_2)^{-2}\\
=&\int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{R}}(M_J^+ \cap \mathsf{N}_{\mathbf{R}})\backslash M_J^+} dm\, W(m; X_{(0,-2)} \cdot X_{(i_n,-1)} \cdots X_{(i_{p+1},-1)} \cdot (X_{(-1,-1)})^{p-2})\\
&\times W'(m_2) f(s, m_1) \times (y_1y_2^2)^{-1}
\end{aligned}
$$

ここで積分の右不変性を使って

$$= \int_{Z_{\mathbf{R}}(M_J^\dagger \cap N_{\mathbf{R}})\backslash M_J^\dagger} dm\, W(m; X_{(i_n,-1)} \cdots X_{(i_{p+1},-1)} \cdot (X_{(-1,-1)})^{p-2})$$
$$\times W'(m_2; -X_{(0,-2)}) f(s, m_1)(y_1 y_2^2)^{-1},$$

となるが，$W'(m_2; -X_{(0,-2)}) = 0$ よりこの積分はゼロとなる。 □

この補題を，$(q_1, q_2) = (-\lambda_2, -\lambda_1)$, $-q_2 + n = l$ として用いると，やはり $Q(s) = 1$ となる。したがって，このときにも，定理が成立することが言えた。 □

付録. Basic identity の証明

[Bu] にも概略があるが，念のため書いておく。代数群の間のうめこみ $\iota : GL(2) \hookrightarrow \mathsf{G}$ を

$$\iota(\gamma) = \left(\begin{array}{cc|cc} \det(\gamma) & & & \\ & a & b & \\ \hline & & 1 & \\ & c & & d \end{array}\right), \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2)$$

で定める。このとき，つぎの補題をまず示す：

補題 4.3.

$$\int_{k\backslash \mathbf{A}_k} F(n(0, x_1, 0, 0)g)dx_1 = \sum_{\gamma \in \mathsf{N}'_k \backslash GL(2)_k} \mathcal{W}_F(\iota(\gamma)g).$$

Proof. $(x_0, x_2) \in (k\backslash \mathbf{A}_k)^2$ の関数 h を

$$h(x_0, x_2) := \int_{\mathbf{A}_k/k} F(n(x_0, x_1, x_2, 0)g)dx_1$$

で定めると，

$$rhs. = \sum_{\gamma \in \mathbf{Q}_k \backslash GL(2)_k} \sum_{\delta \in k^\times} \mathcal{W}_F(\mathrm{diag}(\delta, \delta, 1, 1)\iota(\gamma)g)$$
$$= \sum_{\gamma \in \mathbf{Q}_k \backslash GL(2)_k} \int_{(\mathbf{A}_k/k)^3} dx_1\, dx_2\, dx_0\, F(n(x_0, x_1, x_2, 0)\iota(\gamma)g)\, \psi(x_0)$$
$$= \sum_{\gamma \in \mathbf{Q}_k \backslash GL(2)_k} \int_{(\mathbf{A}_k/k)^2} h(x'_0, x'_2)\psi(x_0)dx_0 dx_2$$
$$= \sum_{\gamma \in \mathbf{Q}_k \backslash GL(2)_k} \int_{(\mathbf{A}_k/k)^2} h(x'_0, x'_2)\psi(dx'_0 - cx'_2)dx_0 dx_2$$
$$= \sum_{(c,d) \in k^2, (c,d) \neq (0,0)} \int_{(\mathbf{A}_k/k)^2} h(x'_0, x'_2)\psi(dx'_0 - cx'_2)dx_0 dx_2 = lhs.$$

ここで，2つ目の等号で [Mo-2, 補題 9] を用いた。また，3つ目の等号で G_k の元を左側へ移動させ，$x'_0 = \dfrac{ax_0 + cx_2}{ad - bc}$, $x'_2 = \dfrac{bx_0 + dx_2}{ad - bc}$ と変数変換した。 □

次に，$\mathsf{P} := \mathsf{H} \cap (\mathsf{B}' \times GL(2))$ と定義すると，

$$\mathsf{P}_k \mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k} \backslash \mathsf{H}_k \mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k} \cong \mathsf{P}_k \backslash \mathsf{H}_k \cong \mathsf{B}'_k \backslash GL(2)_k$$

なので,

$$
\begin{aligned}
&Z(s,F\otimes\varphi,f)\\
&=\int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\mathsf{H}_k\backslash\mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh\,F(h)\varphi(h_2)\sum_{\gamma_1\in\mathsf{B}'_k\backslash GL(2)_k} f(s,\gamma_1 h_1)\\
&=\int_{\mathsf{P}_k\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\backslash\mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh\,F(h)\varphi(h_2)f(s,h_1)\\
&=\int_{\mathsf{P}_k(\mathsf{N}'\times 1)_{\mathbf{A}_k}\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\backslash\mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh\int_{\mathsf{P}_k\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\backslash\mathsf{P}_k(\mathsf{N}'\times 1)_{\mathbf{A}_k}\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}} dn' F(n'h)(\varphi\cdot f)(s,n'h)\\
&=\int_{\mathsf{P}_k(\mathsf{N}'\times 1)_{\mathbf{A}_k}\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\backslash\mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh\int_{k\backslash\mathbf{A}_k} dx_1\;F(n(0,x_1,0,0)h)\varphi(h_2)f(s,h_1)
\end{aligned}
$$

ここで, 上の補題を使って

$$
\begin{aligned}
&=\int_{\mathsf{P}_k(\mathsf{N}'\times 1)_{\mathbf{A}_k}\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\backslash\mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh\sum_{\gamma\in\mathsf{N}'_k\backslash GL(2)_k}\mathcal{W}_F(\iota(\gamma)h)\varphi(h_2)f(s,h_1)\\
&=\int_{(\mathsf{H}\cap(\mathsf{B}'\times\mathsf{B}'))_k(\mathsf{N}'\times 1)_{\mathbf{A}_k}\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\backslash\mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh\,\mathcal{W}_F(h)\varphi(h_2)f(s,h_1)\\
&=\int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}_k}\mathsf{N}^{\mathsf{H}}_{\mathbf{A}_k}\backslash\mathsf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh\int_{\mathsf{N}'_k\backslash\mathsf{N}'_{\mathbf{A}_k}} dn\,\mathcal{W}_F((1,n')h)\varphi(h_2)f(s,h_1)\\
&=rhs.
\end{aligned}
$$

REFERENCES

[B-H] BÖCHERER, S. AND HEIM, B., *L-functions on* $\mathrm{GSp}_2\times\mathrm{Gl}_2$ *of mixed weights.*, Math. Z. **235** (2000), 11–51.

[Bu] BUMP, D., The Rankin-Selberg method: a survey. Number theory, trace formulas and discrete groups, 49-109, Academic Press, (1989).

[F] FURUSAWA, M., On L-functions for $\mathrm{GSp}(4)\times\mathrm{GL}(2)$ and their special values., J. Reine Angew. Math. **438** (1993), 187–218.

[H] HEIM, B., *Pullbacks of Eisenstein series, Hecke-Jacobi theory and automorphic L-functions.* Automorphic forms, automorphic representations, and arithmetic (Fort Worth, TX, 1996), 201–238, Proc. Sympos. Pure Math., **66** Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Is] ISHII, T., On principal series Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{R})$, preprint (2002).

[Is-Mo] ISHII, T. AND MORIYAMA, T., *Spinor L-functions for generic cusp forms on* $GSp(2)$ *belonging to principal series representations (tentative)*, in preparation.

[J] JACQUET, H., *Automorphic forms on* $GL(2)$, Lecture Notes in Mathematics **278**, Springer-Verlag (1972).

[J-S] JACQUET, H. AND SHALIKA, J. A, *On Euler products and the classification of automorphic representations. I.*, Amer. J. Math. **103** (1981), 499–558.

[Mi-O1] MIYAZAKI, T AND ODA, T., *Principal series Whittaker functions on* $\mathrm{Sp}(2;R)$. *II.*, Tohoku Math. J. (2) **50** (1998), no. 2, 243–260.

[Mo-1] MORIYAMA, T., *A remark on Whittaker functions on* $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9** (2002), no. 4, 627–635.

[Mo-2] MORIYAMA, T., $Sp(2,\mathbf{R})$ 上の *Whittaker* 関数と *Novodvorsky* のゼータ積分について In: 保型形式およびそれに付随するディリクレ級数の研究, 京都大学数理解析研究所講究録 **1281** (2002), 1–13.

[Mo-3] MORIYAMA, T., *L-functions attached to non-holomorphic Siegel modular forms of degree 2* In: ディオファントス問題と解析的整数論, 京都大学数理解析研究所講究録 **1319** (2003), 174-182.

[Mo-4] MORIYAMA, T., *Entireness of the Spinor L-functions for certain generic cusp forms on $GSp(2)$*, to appear in the American Journal of Mathematics.

[Ni-2] NIWA, S., Commutation Relations of Differential operators and Whittaker Functions on $Sp_2(\mathbf{R})$, Proc. Japan Acad. **71** Ser A. 189-191, (1995).

[No] NOVODVORSKY, M. E. , Automorphic L-functions for symplectic group $GSp(4)$. Proc. Sympos. Pure Math. **33** Part 2, 87-95, (1979).

[O] ODA, T., An explicit integral representation of Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{R})$ for large discrete series representations, Tôhoku Math. J. **46**, 261-279 (1994).

[So-1] SOUDRY, D., The L and γ factors for generic representations of $GSp(4,\ k) \times GL(2,\ k)$ over a local non-Archimedean field k., Duke Math. J. **51**, 355–394, (1984).

[So-2] SOUDRY, D.,On the Archimedean theory of Rankin-Selberg convolutions for $\mathrm{SO}_{2l+1} \times \mathrm{GL}_n$., Ann. Sci. École Norm. Sup. **28** 161–224 (1995).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SOPHIA UNIVERSITY, 7-1 KIOI-CHO, CHIYODA-KU, TOKYO, 102-8554 JAPAN

E-mail address: `moriyama@mm.sophia.ac.jp`